LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 8

Pojam funkcije, grafa i inverzne funkcije

Lekcije iz Matematike 1.

8. Pojam funkcije, grafa i inverzne funkcije

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuju pojam funkcije i njena uloga u inženjerstvu, njena geometrijska interpretacija (graf), osnovna svojstva funkcija i pojam inverzne funkcije.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

U proučavanju prirode i u inženjerstvu javljaju su razne veličine (vrijeme, masa, brzina, temperatura, obujam, udaljenost, položaj itd.). U tipičnoj situaciji razmatraju se dvije veličine koje nisu neovisne jedna od druge, već promjena jedne utječe na promjenu druge, dakle te su dvije veličine povezane. Problem opisivanja takvih veza je temeljni inženjerski problem, a matematički se rješava uvodjenjem pojma funkcije.
Da bi se bolje uočavale spomenute veze, dobro ih je geometrijski predočiti; matematički to se ostvaruje grafom funkcije.

III. Potrebno predznanje

Pojam funkcije i grafa funkcije obradjuje se već u osnovnoj ˇ, a sustavnije u srednjoj školi: linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi. U ovoj lekciji važno će biti poznavanje linearne i kvadratne funkcije. Takodjer, bit će potrebno poznavanje realnih brojeva i koordinatnog sustava na pravcu i ravnini.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Primjeri zavisnih veličina

Proteklo vrijeme i položaj čestice koja se giba na pravcu.
Zamislimo da se čestica giba po pravcu. Temeljni problem **opisa** tog gibanja jest da se odredi **pravilo** koje će nam kazati koji je položaj te čestice u svakom odabranom trenutku.
Da bi se taj problem matematizirao i (barem načelno) matematički riješio, treba:
1. Uvesti koordinatni sustav na pravac po kojemu se odvija gibanje, tj. izabrati ishodište, mjernu jedinicu za duljinu i usmjerenje (tj. odabrati točku pravca koja će imati koordinatu 0).
Sad položaj čestice na pravcu možemo interpretirati kao broj - koordinatu

položaja; tako je položaj veličina (oznaka s) koja ima realne vrijednosti.
2. Dogovoriti se za nulto vrijeme i jedinicu mjerenja vremena; tako je vrijeme veličina (oznaka t) koja takodjer ima realne vrijednosti.

Sad se problem opisa tog gibanja može prevesti na sljedeći matematički problem:
za svaku vrijednost veličine t treba odrediti vrijednost veličine s Da bismo naznačili da neka vrijednost veličine s odgovara nekoj vrijednosti t vremena, pišemo $s(t)$, dakle:

$s(t) :=$ koordinata položaja čestice u vrijeme t (sl.1.).

sl. 1.

Na primjer:
$s(2) = 4$ znači da je za $t = 2$ čestica bila u točki s koordinatom 4.
Uočimo da je u ovom važnom primjeru, vrijeme t primarna veličina, a položaj s sekundarna; kažemo da veličina s **zavisi** o veličini t.

Varijante. Svaku veličinu koja ovisi o vremenu prirodno možemo zamišljati kao gibanje po pravcu; naime zamišljamo kako se, dok vrijeme protječe, vrijednost te veličine giba po brojevnom pravcu. Na primjer:
1. masa m nekog spoja koji nastane u nekoj reakciji za neko vrijeme.
2. temperatura τ koja nastane pri nekoj reakciji u nekom vremenu.
3. brzina v kojom se odvija neka reakcija u nekom vremenu.

Općenito, ako imamo imamo dvije veličine tako da druga ovisi o prvoj, ta je zavisnost analogna gibanju po pravcu. Naime vrijednosti druge (zavisne) veličine mijenjaju se (gibaju) na brojevnom pravcu dok se mijenja prva veličina (koja u ovim okolnostima zamjenjuje vrijeme).

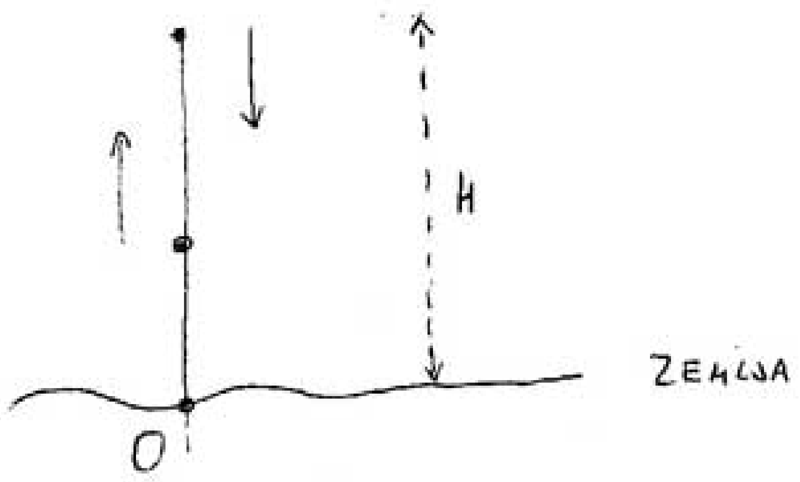
Vrijednosti koje postiže veličina.

Pri gibanju po pravcu čestica **načelno** može biti u svakom položaju, pa je, općenito, skup vrijednosti veličine s (koja registrira položaj) skup realnih brojeva. Skup vrijednosti koje **zaista postiže** ta veličina u konkretnom slučaju, u pravilu je manji.

Primjer 1. Opišimo skup vrijednosti koje pri vertikalnom hicu može postići veličina
(i) položaja s

(ii) vremena t.

(i) Ovaj problem nema jednoznačan odgovor. On ovisi o više faktora.
1. Faktor - uvodjenje koordinatnog sustava na pravac po kojemu se odvija gibanje. Uobičajeno je da je ishodište u razini zemlje i da je pozitivni smjer (usmjerenje) prema uvis (sl.2.).



Sl.2.

Ako to prihvatimo, onda je skup vrijednosti koje s može postići segment $[0, H]$, gdje je H visina do koje dodje čestica prije nego počme padati.

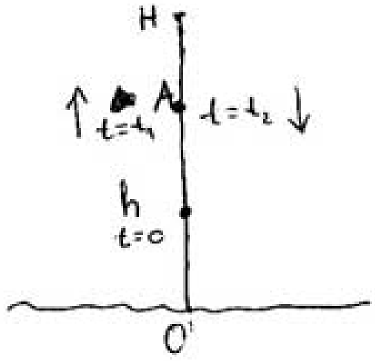
2. Faktor - visina na kojoj je bila čestica kad smo je hitnuli u vis.

3. Faktor - brzina kojom je čestica hitnuta u vis.
Ima i više drugih faktora (otpor zraka, stvarna zemljina sila koja djeluje na česticu itd.), ali njih zanemarujemo, jer ovdje razmatramo gibanje u idealnim uvjetima).
(ii) Ni ovaj problem nema jednoznačno rješenje. On takodjer ovisi o više faktora. Uz faktore 2. i 3. tu je još:

4. Faktor - odabir nultog vremena (i jedinice za vrijeme). Obično se uzima da je u $t = 0$ čestica izbačena u vis. Tada t postiže segment $[0, T]$, gdje je T vrijeme u trenutku kad čestica udari u pod.
Možemo zamisliti da se gibanje i nakon pada nastavlja (samo što čestica miruje) pa t postiže vrijednosti iz $[0, \infty]$.
Dalje, možemo zamisliti da je gibanje bilo i prije izbacivanja u vis (samo što je čestica mirovala); tada t postiže svaku realnu vrijednost.

Uočimo da pri gibanju po pravcu svakoj vrijednosti veličine t odgovara točno jedna (jedinstvena) vrijednost veličine s, a da obratno ne mora biti.

Primjer 2. (i) Pri jednolikom pravom gibanju čestice po pravcu svakoj vrijednosti veličine t odgovara jedinstvena vrijednost veličine s, i obratno, tj. čestica se ne može naći u istom položaju za dva različita trenutka.
(ii) Pri vertikalnom hicu, svakom t odgovara jedinstven s, medjutim obratno ne vrijedi (jer će čestice neke položaje postići dva puta: pri gibanju u vis i pri padu (sl.3.).



Sl. 3. U $t=t_1$ čestica je u točki A i giba se prema gore.
U $t=t_2$ čestica je također u točki A, ali se giba prema dolje.

Pravilo prema kojem su povezane dvije veličine. Dvije zavisne veličine na različite načine mogu ovisiti jedna o drugoj.

Primjer 3. Odredimo pravilo prema kojemu zavise t i s pri gibanju po pravcu stalnom brzinom $v = 3$ ako je:
(i) u $t = 0$ čestica bila u $s = 0$
(ii) u $t = 0$ čestica bila u $s = 2$

(i) $s(t) = 3t$
(ii) $s(t) = 3t + 2$.
Uočite da se pomoću tih formula može odrediti položaj u svakom trenutku.

Primjer 4. Odredimo pravilo prema kojem zavise
(i) duljina stranice kvadrata x i njegova površina y.
(ii) obujam kugle y i polumjer kugle y

(i) $y(x) = x^2$.
(ii) $y(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

Pojam funkcije. Gibanje po pravcu mogli smo zamisliti kao pridruživanje, koje svakoj vrijednosti varijable t pridružuje neku vrijednost varijable s. Slično

bi se mogle interpretirate veze drugih spomenutih veličina. Svugdje možemo uočiti
1. Skup A vrijednosti prve veličine.
2. Skup B vrijednosti druge (zavisne) veličine.
3. Pravilo zavisnosti, tj. pravilo f prema kojemu druga (zavisna) veličina o prvoj. Vrijednost druge veličine koja odgovara vrijednosti x prve veličine, prema pravilu f, označava se kao $f(x)$
Kažemo da je f **funkcija** sa skupa A u skup B i pišemo

$$f : A \to B$$

Prva (nezavisna) varijabla x naziva se i **argument**. Kažemo da je $f(x)$ vrijednost funkcije f u x, A domena - područje definicije i B **kodomena - područje vrijednosti**.

Primjer 5. Zapišimo pomoću f pravila zavisnosti iz Primjera 3. i 4.

Primjer 3. (i) $f(t) := 3t$, (ii) $f(t) := 3t + 2$
Primjer 4. (i) $f(x) := x^2$, (ii) $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$

Ovakvim zapisima kažemo da smo funkciju zadali **analitički** jer smo dali formulu prema kojoj funkcija djeluje. Uočite da se analitički zapis funkcije sastoji od:
1. **lijeve strane**, na primjer, $f(x)$; tu je f funkcija, a x argument (prva varijabla).
2. znaka $:=$; čita se *jednako je prema definiciji*; taj znak koristimo umjesto obične jednakosti, da bi se zadavanje funkcije razlikovalo od jednadžbe.
3. **desne strane** - analitičkog izraza, na primjer x^2.
Sve skupa, tj. $f(x) := x^2$ znači da se vrijednosti funkcije f računaju prema pravilu koje je zadano izrazom na desnoj strani.
U analitičkom zapisu funkcije nigdje se ne spominje kako se označava druga varijabla (a možemo je označiti kao $y, z, ...$).

Primjer 6. Odredimo vrijednost u 4 funkcije f iz Primjera 5.

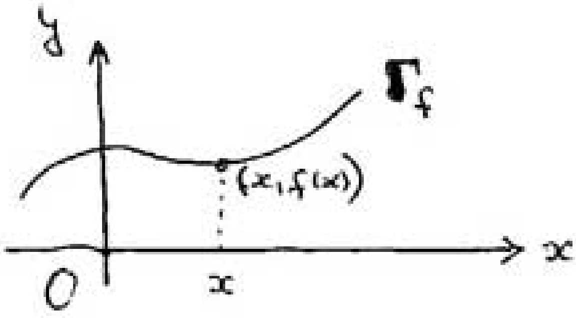
Treba izračunati $f(4)$. Dobijemo redom:
Ako je $f(t) := 3t$ onda je $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$.
Ako je $f(t) := 3t + 2$ onda je $f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$
Ako je $f(x) := x^2$ onda je $f(4) = 4^2 = 16$
Ako je $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$ onda je $f(4) = \frac{4\pi}{3}4^3 = \frac{256}{3}\pi$

Graf funkcije. Da bismo je bolje dočarali, funkciju možemo predočiti dinamički. Na primjer, gibanje na pravcu možemo kompjutorski simulirati tako da doživimo kretanje čestice, promjenu brzine i sl.
Drugi, puno važniji i tehnički jednostavniji pristup, jest **grafičko predočavanje funkcije**, kojim, za svaku vrijednost argumenta x (nezavisne varijable), geometrijski predočavamo odgovarajuću vrijednost zavisne varijable y, tj. vrijednost $f(x)$. To postižemo tako da u koordinatnoj ravnini na horizontalnu os nanosimo x-vrijednosti, a na vertikalnu y-vrijednosti. Da naznačimo da vrijednosti argumenta x, odgovara vrijednost $f(x)$ zavisne varijable y, ucrtavamo

točku (uredjeni par) $(x, f(x))$. Skup svih takvih točaka zovemo **graf funkcije** (oznaka G_f ili Γ_f). Dakle:

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\}$$

gdje x prolazi domenom funkcije f (sl.4.).



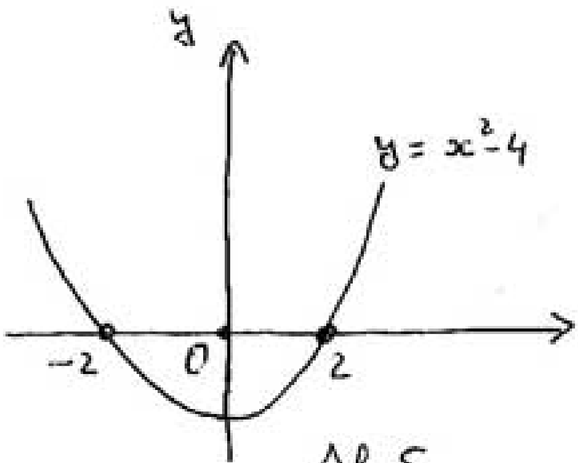
Sl. 4.

Uočimo sljedeće:
Koordinatna se ravnina sastoji od svih mogućih uredjenih parova (x, y) gdje su x, y realni brojevi. Tu su koordinate x, y **nezavisne** (medju njima nema nikakvih veza); zato je ravnina **dvodimenzionalna**.
Graf funkcije sastoji se od uredjenih parova (x, y) gdje x, y **nisu nezavisni**, već medju njima postoji jedna veza:

$$y = f(x)$$

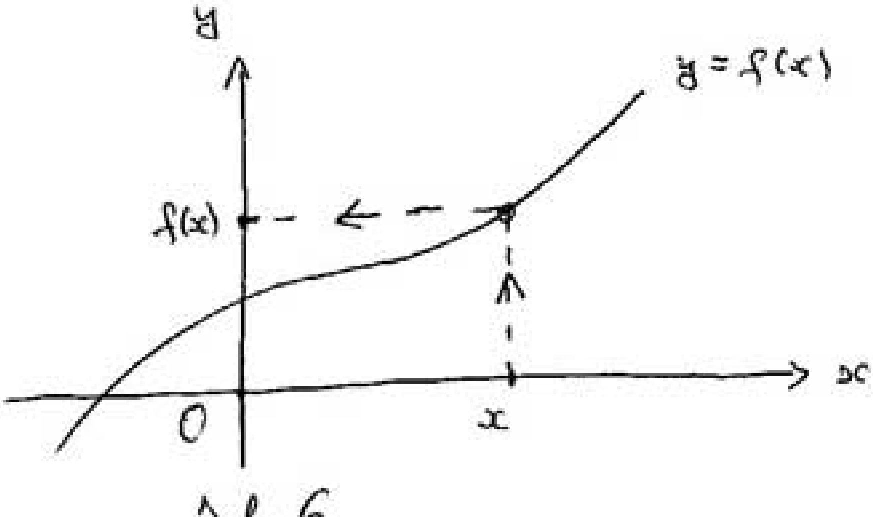
zato se dimenzija spušta za 1, pa je graf funkcije jednodimenzionalan, a kako je potpuno odredjen gornjom vezom, nju zovemo **jednadžba grafa** (i tu jednadžbu obično i pišemo uz graf, umjesto oznake Γ_f). Dakle, treba razlikovati:
f..... to je funkcija;
$f(x)$....to je vrijednost funkcije f u x,
$y = f(x)$....to je jednadžba grafa (to je jednadžba s dvjema nepoznanicama, poput jednadžbe pravca, kružnice i sl.)
$f(x) = 0$.....to je jednadžba (s jednom nepoznanicom) pridružena funkciji f.

Primjer 7. Neka je funkcija f zadana s $f(x) := x^2 - 4$. Tada je njen graf **parabola** s jednadžbom $y = x^2 - 4$ (dakle skup rješenja te jednadžbe je beskonačan - jedna jednadžba s dvjema nepoznanicama - i geometrijski je parabola).
Jednadžba $x^2 - 4 = 0$ je jednadžba s jednom nepoznanicom (pridružena funkciji f) i ima dva rješenja: ± 2, geometrijski to su apscise točaka u kojima graf funkcije f siječe x-os (sl.5.).



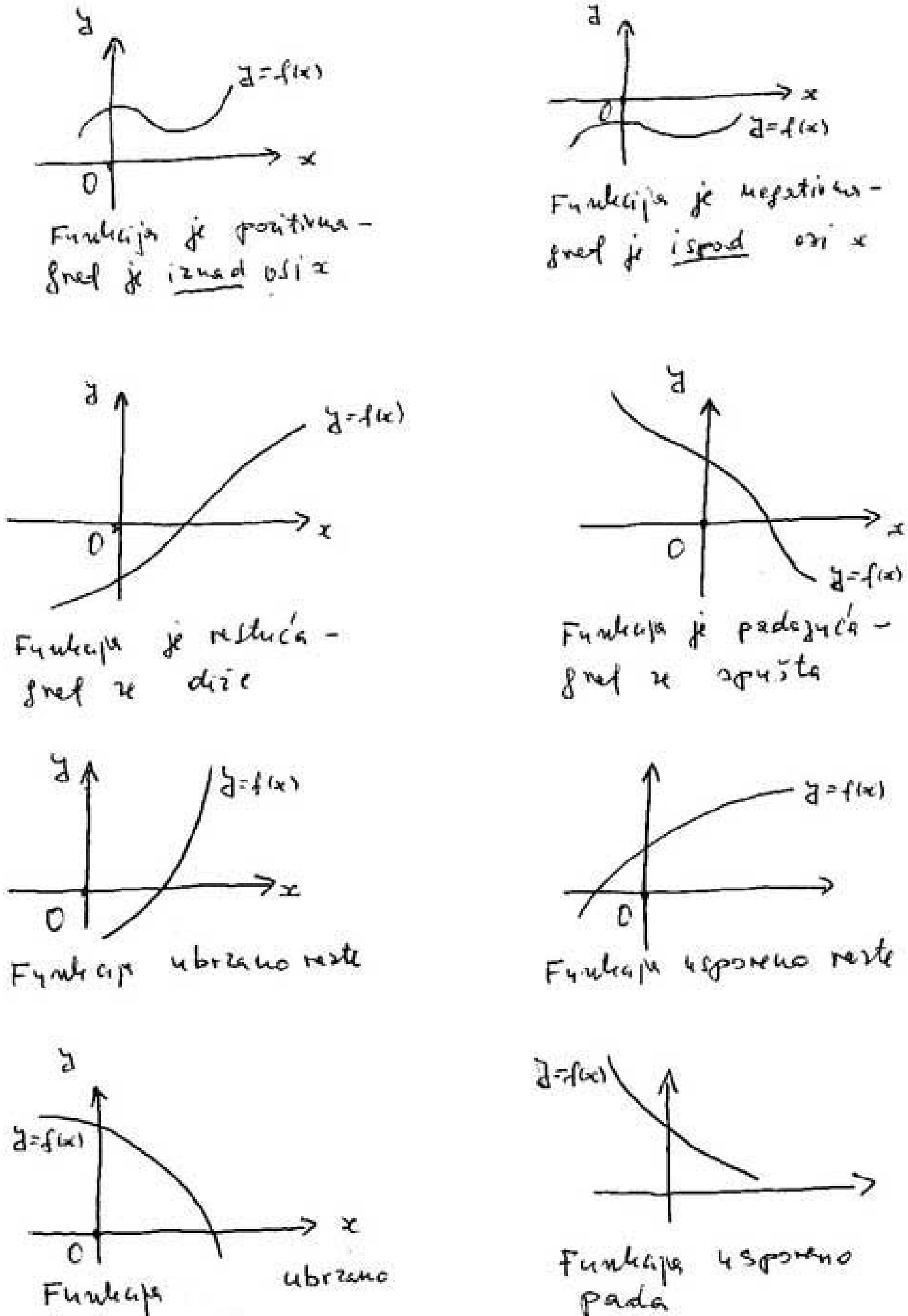
Sl.5

Očitavanje vrijednosti funkcije iz grafa funkcije. Ako nam je poznat graf funkcije, onda možemo grafički približno odrediti vrijednost funkcije f u x ovako:
1. korak. Iz točke s koordinatom x na horizontalnoj osi povlačimo okomicu.
2. korak. Odredjujemo točku u kojoj okomica siječe graf.
3. korak. Kroz točku presjeka povlačimo paralelu s x-osi.
4. korak. Odredjujemo točku u kojoj paralela siječe y-os; ta točka ima koordinatu $f(x)$ (sl.6.).



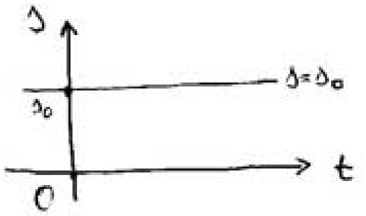
Sl.6

Očitavanje svojstava funkcije (funkcijske zavisnosti) iz grafa funkcije. Iz grafa funkcije zorno se očituju neka važna svojstva funkcije: **pozitivnost, negativnost, rast, pad, ubrzani rast, ubrzani pad, usporeni rast, usporeni pad, itd.** (sl.7.).

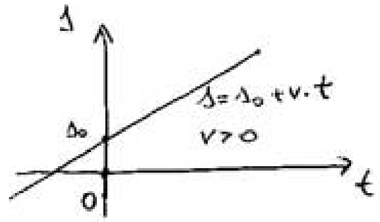


Sl. 7.

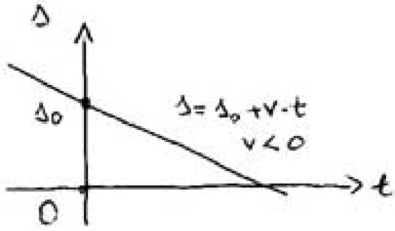
s-t dijagram. To je graf zavisnosti položaja s čestice (koja se giba po pravcu) i vremena t. On dočarava kako se čestica giba po pravcu s-osi, dok vrijeme protječe (ide po t-osi od lijeva prema desnu). Treba razlikovati ova jednostavna gibanja po pravcu:



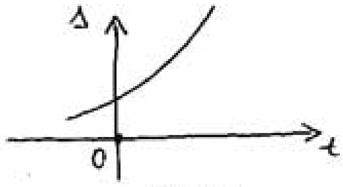
Sl. 8



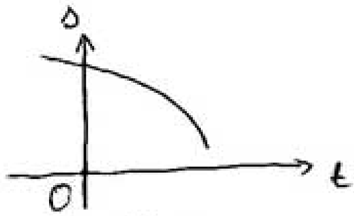
Sl. 9



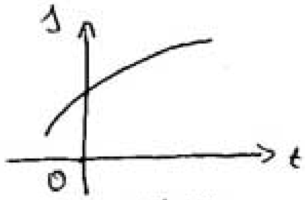
Sl. 10



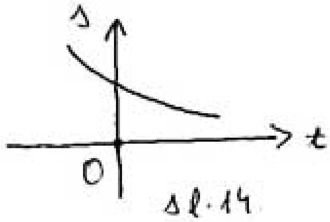
Sl. 11



Sl. 12.



Sl. 13



sl. 14

1. Mirovanje (graf je paralela s t-osi (sl.8.).

2. (i) Jednoliko u pozitivnom smjeru (graf je pravac s pozitivnim koeficijentom smjera) (sl.9.)

(ii) jednoliko u negativnom smjeru (graf je pravac s negativnim koeficijentom smjera) (sl.10.)

3. (i) ubrzano u pozitivnom smjeru (graf je rastući i konveksan) (sl.11.)

(ii) ubrzano u negativnom smjeru (graf je padajući i konkavan) (sl.12.)

4. (i) usporeno u pozitivnom smjeru (graf je rastući i konkavan) (sl.13.)

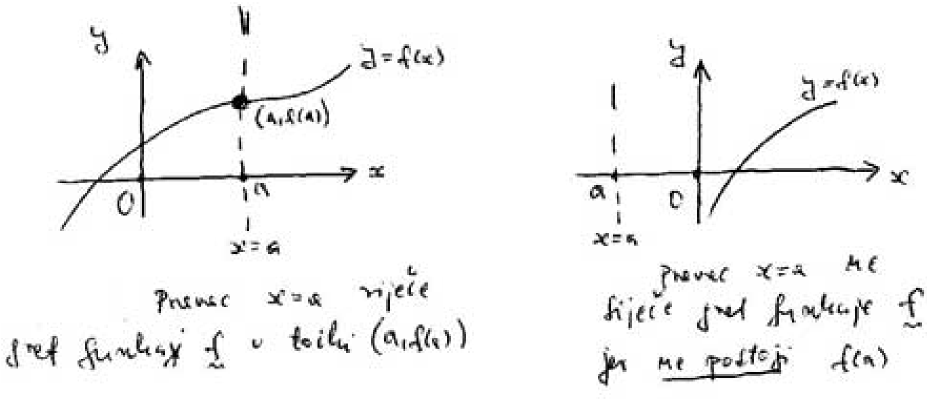
(ii) usporeno u negativnom smjeru (graf je padajući i konveksan) (sl.14.)

Grafičko rješavanje jednadžba - inverzna funkcija

Uočite ovo svojstvo grafa funkcije:
Pravac okomit na x-os, tj. pravac s jednadžbom

$$x = a$$

siječe graf funkcije točno u jednoj točki ili ni u jednoj - ovisno o tome postoji li $f(a)$ **ili ne postoji** (sl.15.).



Sl. 15.

Razmotrimo sad pravac usporedan s x-osi, tj. pravac s jednadžbom

$$y = b$$

i njegov presjek s grafom funkcije. Tu mogu nastupiti ove mogućnosti:

1. Pravac ne siječe graf funkcije f - to znači da jednadžba

$$f(x) = b$$

nema rješenja (sl.16.).

2. Pravac siječe graf funkcije f u jednoj točki - to znači da jednadžba

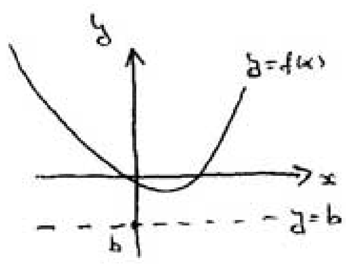
$$f(x) = b$$

ima točno jedno rješenje (sl.17.).

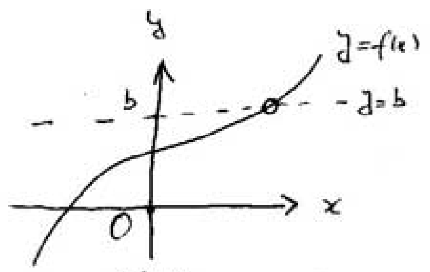
3. Pravac siječe graf funkcije f u dvije ili više točaka - to znači da jednadžba

$$f(x) = b$$

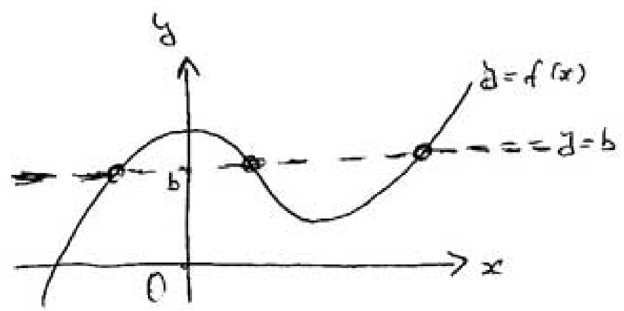
ima dva ili više rješenja (sl.18.).



Sl. 16.



Sl. 17



Sl. 18

Ako nastaju samo mogućnosti 1. i 2. onda funkcija ima **inverznu funkciju**. O tome ćemo više govoriti u sljedećoj lekciji.